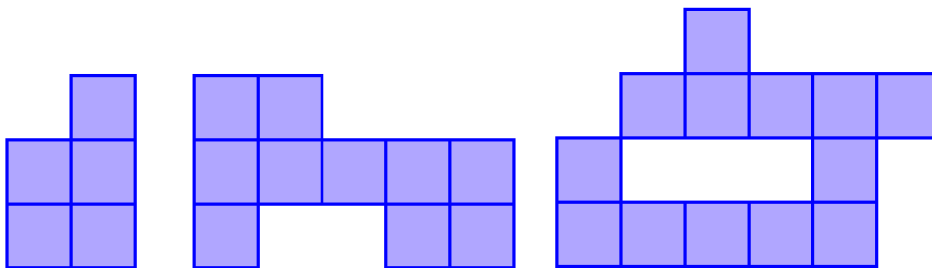


Trous dans des formes faites de pièces carrées.

Jean-Paul Delahaye

PARTIE A

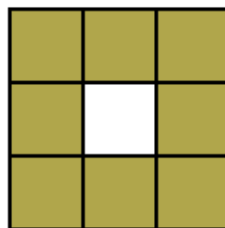
On s'intéresse aux formes composées de pièces carrées accolées les unes aux autres et se touchant côté contre côté. Voici trois exemples de telles formes :



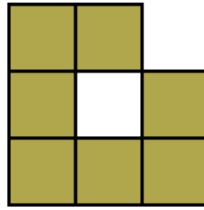
On va réfléchir au nombre minimum de pièces carrées nécessaires pour faire une forme ayant exactement un trou, ou exactement deux trous, etc.

Pour qu'un trou compte, il faut qu'il soit entouré complètement par des pièces carrées. Donnons des exemples.

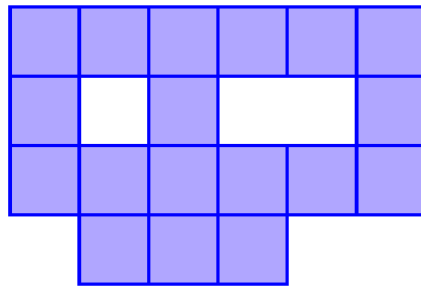
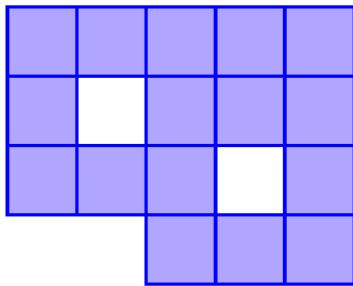
La figure suivante possède un trou :



La figure suivante n'est pas considérée comme ayant un trou car le carré du centre n'est pas complètement entouré :

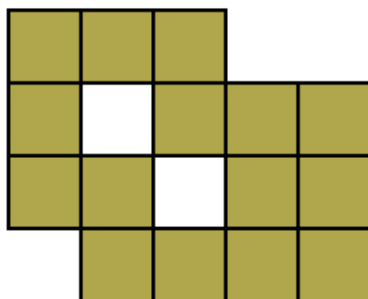


Les figures suivantes sont considérées comme ayant deux trous :



La surface des deux trous de la première forme est 2. La surface des trous de la seconde forme est 3 (car elle correspond à 3 carrés).

La forme suivante est considérée comme n'ayant qu'un seul trou (de surface 2) car les deux carrés vides se touchent :



Question 1.

Dessinez dix formes différentes ayant un seul trou. Essayez de les faire avec le moins de pièces carrées.

On ne considère pas comme différentes des formes qui se déduisent l'une de l'autre par une rotation ou une symétrie.

Faire les dessins soigneusement.

Question 2.

(a) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant deux trous ?

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

(b) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant des trous dont la surface totale est 2.

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

Question 3.

(a) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant trois trous ?

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

(b) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant des trous dont la surface totale est 3.

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

Question 4.

(a) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant quatre trous ?

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

(b) Combien faut-il au minimum de pièces carrées pour construire une figure ayant des trous dont la surface totale est 4.

Peut-on trouver plusieurs formes différentes donnant la solution ? Combien ?

Faire les dessins soigneusement.

Question 5

Poursuivre l'étude et faisant un tableau donnant les réponses

(a) pour 5 trous, 6 trous, ..., 20 trous.

(b) des trous dont la surface est 5, 6, ..., 20.

Faire les dessins soigneusement indiquant les solutions.

Question 6

(a) On notera $f(k)$ le nombre minimum de pièces carrées nécessaires pour obtenir une forme ayant k trous. Proposez une formule $h(k)$ telle que pour tout entier k :

$$f(k) \leq h(k)$$

Pour cela, il suffit de trouver une forme simple ayant k trous et de compter combien elle possède de pièces carrées.

(b) Proposez un raisonnement montrant que :

$$2k \leq f(k)$$

(c) Essayez de trouver une règle générale pour k trous, k un nombre entier quelconque > 1 .

Traiter d'abord le cas où k est un carré ($k = 4, 9, 16, \dots$)

(d) On notera $g(k)$ le nombre minimum de pièces carrées nécessaires pour obtenir une forme dont la surface totale des trous est k .

(e) Essayez de trouver une règle générale pour des trous de surface k , k un nombre entier quelconque.

PARTIE B

Reprendre tout le problème avec des pièces triangulaires équilatérales.

PARTIE C

Reprendre tout le problème avec des pièces triangulaires hexagonales (chaque pièce est un hexagone régulier).

Remarque. Il s'agit d'un problème de recherche, certaines questions sont sans doute difficiles. Je ne connais pas toutes les réponses.