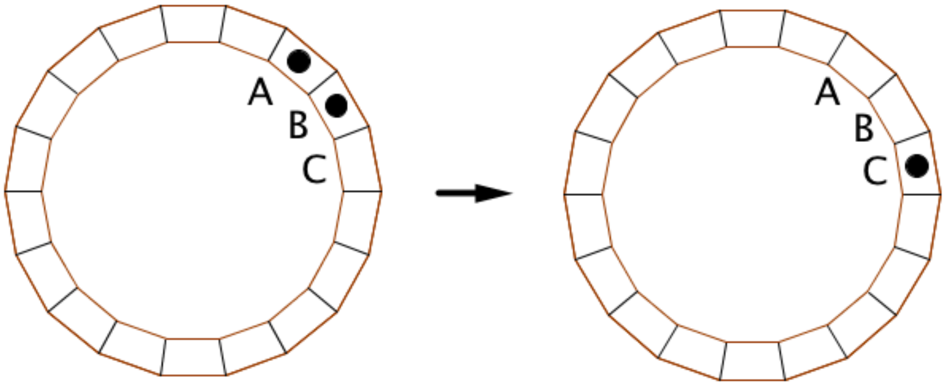
Sujets Math.en.JEANS
Doha 2016

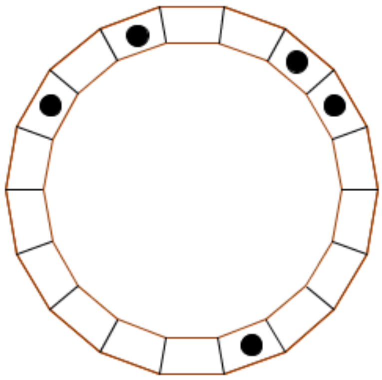
rittaud@math.univ-paris13.fr

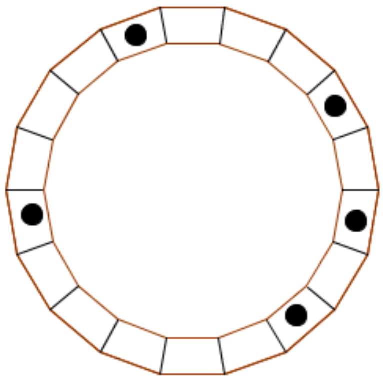
Sujet n°1 : Solitaire circulaire

On considère un ensemble de plusieurs cases disposées en cercle. Sur chaque case, il peut y avoir 0 ou 1 jeton. Lorsque deux cases A et B contigües contiennent un jeton et que celle qui suit (dans le sens des aiguilles d'une montre), C, n'en contient pas, on peut enlever les jetons de A et B pour en mettre un sur C.



Une situation de jeu est dite *stable* lorsqu'il n'y a plus de cases qui se suivent contenant deux jetons.


Exemple de situation non stable


Exemple de situation stable

Y a-t-il un cas où il n'est pas possible d'atteindre une situation stable ? En-dehors de ce cas éventuel, proposer une méthode permettant à tous les coups de se ramener à une situation stable.

Combien y a-t-il de situations stables dans un jeu à 4 cases ? à 5 cases ? à 6 cases ? à n cases ?

Une situation stable étant donnée, chercher comment ajouter des jetons (éventuellement en plusieurs fois) pour pouvoir atteindre une situation stable ne contenant qu'un seul jeton.

Sujet n°2 : Le format A4

Une feuille au format A4 est un rectangle dont les côtés mesurent 21 cm et 29,7 cm. En pliant en deux un A4, on obtient un A5. Calculer le rapport longueur/largeur pour un A4. Faire de même pour un A5. Et si l'on plie encore (formats A6, A7, etc.) ?

Chercher la valeur exacte que doit avoir le rapport longueur/largeur d'un rectangle pour que celui-ci ait la même propriété (de façon exacte). Chercher ensuite le rapport longueur/largeur à prendre pour qu'une propriété analogue se produise en pliant le rectangle en 3 (puis en 4, en 5…).

Sujet n°3 : Dynamique substitutive

Une suite de lettres *a* et *b* étant donnée, on remplace chaque *a* par *ab* et chaque *b* par *a*. Par exemple, avec le mot *aabb*, on obtient *ababaa*. On peut ensuite recommencer avec le mot *ababaa* obtenu, ce qui donne *abaabaabab*, et ainsi de suite.

On part de la lettre *a* et l'on construit la suite des mots qui s'en déduisent de cette manière. Quelle propriété a chaque nouveau mot par rapport au précédent ? Comment obtenir rapidement chaque nouveau mot à partir des deux précédents ? Peut-on anticiper le nombre exact de *a* et de *b* dans chaque mot ?

Étudier ces questions dans le cas où *a* est remplacé par *aab* et *b* par *a*, ou pour d'autres cas à inventer.

Sujet n°4 : Calendrier perpétuel mental

Le calendrier de l'année 2015 montre que les mois de février et mars ont les mêmes jours aux mêmes dates.

Expliquer pourquoi le phénomène se produit pour février-mars mais pour aucun autre mois consécutifs de l'année. Quel décalage y a-t-il entre janvier et février ? entre mars et avril ? etc. ? Réfléchir au moyen de trouver mentalement (et rapidement) le jour de la semaine d'une date donnée en 2015 en ne se souvenant que du jour correspondant au 1er janvier (jeudi). Et pour une date d'une autre année ?

Sujet n°5 : Écrire les nombres autrement

Première partie

Pour écrire un nombre en base deux, on peut faire un tableau avec les puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, …) comme dans l'exemple ci-dessous pour le nombre 25 :

	32	16	8	4	2	1
25	0	1	1	0	0	1
reste	25	9	1	1	1	0

Le tableau se lit de gauche à droite de la façon suivante :

- 32 est plus grand que 25, donc on laisse, et il reste toujours 25.
- 16 n'est pas plus grand que 25, donc on enlève 16 à 25, il reste 9.
- 8 n'est pas plus grand que 9, donc on enlève 8, il reste 1.
- 4 est plus grand que 1, donc on laisse, et il reste toujours 1.
- 2 est plus grand que 1, donc on laisse, et il reste toujours 1.
- 1 n'est pas plus grand que 1, donc on l'enlève, et il reste 0.

L'écriture en base deux de 25 est donc 011001 ou, en enlevant le 0 initial (tout comme on le fait en base dix), 11001. On écrit :

$$[25]_2 = 11001.$$

Donner l'écriture en base deux des premiers entiers. Comment faire une addition en base deux ? Une multiplication ? Trouver un critère de divisibilité par 2, par 4, par 3… pour les nombres écrits en base deux.

Seconde partie (à ne faire qu'après avoir compris la première)

Dans le tableau précédent, on remplace les puissances de deux par les termes de la *suite de Fibonacci* : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…, où chaque nombre est la somme des deux qui le précèdent. Pour 25, le tableau s'écrit désormais :

	21	13	8	5	3	2	1
25	1	0	0	0	1	0	1
reste	4	4	4	4	1	1	0

L'écriture de 25 en *base de Fibonacci* (ou *de Zeckendorf*) est donc 1000101. On écrit :

$$[25]_F = 1000101.$$

Donner l'écriture en base de Fibonacci des premiers entiers. Donner un moyen simple de savoir si une expression telle que 1011010 est (ou n'est pas) l'écriture en base de Fibonacci d'un entier. Comment faire une addition en base de Fibonacci ? Chercher un critère de divisibilité par 2.