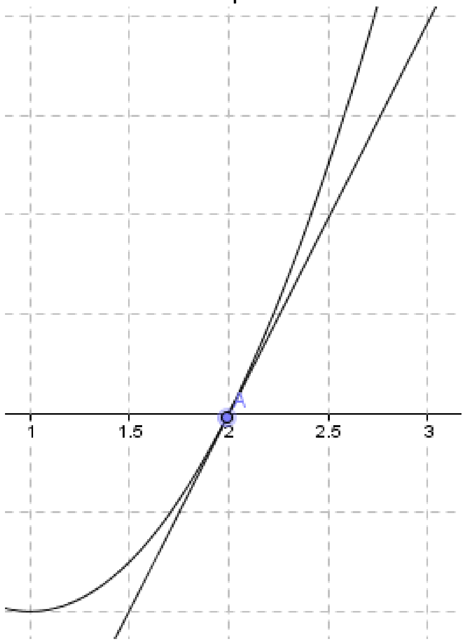
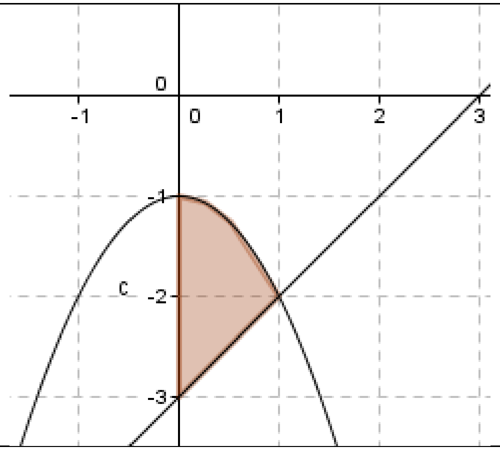
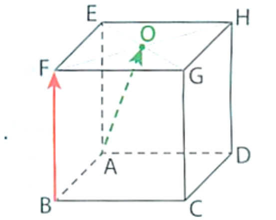
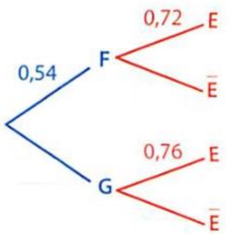
55 questions incontournables

1	On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite est à termes positifs et qu'elle est croissante.	Montrer que pour tout réel x de [0 ;1] : $\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{1+x}$	2
3	Montrer la convergence de la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par : $u_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2}$.	Montrer que pour tout réel x, e^x > x.	4
5	Montrer la convergence de la suite (u_n) définie sur ℕ par : $u_n = 3 + 0{,}75^n$.	Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = -2$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique et en déduire une expression de u_n en fonction de n.	6
7	Démontrer la divergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$	Soit la suite u définie par $u_0 = -0{,}5$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. Montrer que la suite (u_n) est croissante. Etudier les variations de la fonction f telle que $f(u_n) = u_{n+1}$ et en déduire par récurrence que la suite (u_n) est bornée puis convergente.	8
9	Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la 1ère cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorqu'une cible est atteinte, la suivante est atteinte avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la suivante l'est avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$. Soit a_n la probabilité que la n–ième cible soit atteinte. Montrer que pour tout entier n non nul, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.	Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. Exprimer en fonction de n la somme des n premiers termes.	10
11	Soit la suite (u_n) définie par : u_0 = 1 et pour tout entier n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > n^2$. Que peut–on en déduire ?	Calculer les limites en + ∞ et en – ∞ de la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x+1)e^x$ et la limite en + ∞ de la fonction définie sur ℝ par $g(x) = \frac{e^x+1}{e^x+2}$. Calculer les limites en 0 et + ∞ de la fonction définie sur]0 ;+ ∞[par $h(x) = 1 + \frac{2\ln(x)}{x}$ Que peut–on en déduire ?	12

13	Montrer que le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{x} - 3e^{2x}$ est $\frac{1}{3}$.	Etudier les variations sur]0 ;+ ∞[de la fonction définie par $f(x) = \ln(2x) - x.$	14
15	Etudier les variations de la fonction f définie sur]0,5 ; +∞[par : $f(x) = \int_{0,5}^{x} \ln(t)\, dt.$ (on pourra calculer la dérivée de la fonction qui à t associe $t \times lnt - t$)	Soit $\mathscr{C}$ une représentation graphique de la fonction exponentielle dans un repère cartésien. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.	16
17	Savez–vous dériver ? Si $f(x) = e^{2x}$ alors f'(x) = ……. ; si $g(x) = \ln(x)^2$ alors g'(x) = …..	Déterminer la position relative des courbes des fonctions f et g définies sur]0 ; +∞ par f(x) = ln x et g(x) = (ln(x))²	18
19	On considère un repère orthonormé.  Quel nombre dérivé peut–on lire et quelle est sa valeur ?	Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$	20
21	Soit $\mathscr{C}$ une représentation graphique dans un repère orthogonal de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = sin²(x). Montrer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Montrer que la fonction f est π périodique. Sur quel intervalle pourrait–on simplement étudier f ? (rappeler les formules pour axe et centre de symétrie d'une courbe)	Calculer la valeur moyenne de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$.	22

23	 On donne ci–dessous les représentations graphiques des fonctions définies par : $f(x) = -x^2 - 1$ et $g(x) = x - 3$. Déterminer en unités d'aires, l'aire de la partie hachurée ?	Calculer l'aire sous la courbe de la fonction carré sur l'intervalle $[0; 1]$.	24
25	Soit la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = \frac{1}{x\,e^x}$. Pour tout entier n , on pose : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$. Démontrer que pour tout entier n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$	Soit la suite (v_n) définie pour tout entier n non nul par $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1}dx$. Montrer que la suite est à terme positifs.	26
27	a) Montrer que $\frac{1}{i}$ est un imaginaire pur. b) Déterminer l'écriture exponentielle de $-1 - i\sqrt{3}$.	Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Etudier les variations de la suite (I_n).	28
29	Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ a une unique solution sur [0 ;1]. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de cette unique solution.	Savant–vous trouver des primitives (noms en majuscules) ? Si $f(x) = e^{2x}$ alors F(x) = ……. ; si $g(x) = \frac{5}{2x+1}$ $alors\ G(x) = \cdots$	30
31	$\left(-\sqrt{3} + i\right)^{12}$ est–il un réel ?	Compléter : _ pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit… _ si deux plans P et Q sont parallèles alors tout plan R qui coupe l'un …….. et les droites d'intersection de P avec R et de Q avec R sont…	32

33	a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$. b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i\bar{z} = 0$. c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{2z^2}{z+1} = 3i + 2\,z$.	Dans un repère orthonormal de l'espace, on donne les points A(3 ;2 ;1), B(1 ;2 ;0) ; C(3 ;1 ;–2) et M(13 ;1 ;3). Les points A, B, C et M sont–ils coplanaires ?	34
35	Relativement à un repère orthonormal, on considère les points : Soit les points A (1+2i), B(–3–i), C(3–2i). Déterminer l'affixe du point D tel que ACBD soit un parallélogramme.	Relativement à un repère orthonormal, on désigne par M un point d'affixe z. On sait que Re(z) = 3, Im(z)<0, la forme exponentielle de z est $e^{i\theta}$ où θ désigne un réel. Situer avec précision M.	36
37	Relativement à un repère orthonormal, on considère les points : A(–2) ; B(1+i), C(–1–3i). Montrer de 3 façons différentes que ABC est rectangle en A	Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z+2\rvert = \lvert z-i\rvert$? Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\lvert z+2\rvert = \lvert 3-i\rvert$?	38
39	 On considère le cube ABCDEFGH. L'unité de norme est AB. O est le centre du carré FGHE. Calculer $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{CH}$ $puis$ $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BF}$.	Dans un repère orthonormal de l'espace, soit les droites d et d' ayant respectivement pour représentations paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ Quelle est la position relative de ces deux droites ?	40
41	Dans un repère orthonormal de l'espace, donner une méthode pour montrer que : 1°) deux plans sont perpendiculaires. 2°) Une droite est strictement parallèle à un plan 3°) deux droites sont orthogonales 4°) deux droites sont parallèles. 5°) une droite est orthogonale à un plan	Dans un repère orthonormal de l'espace, soit la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ et le plan P d'équation x+y+z–1 = 0. 1°) Montrer que D et P sont sécantes en un point dont on déterminera ses coordonnées. 2°) Donner la représentation paramétrique d'une droite strictement parallèle à P et celle d'une autre droite incluse dans P.	42
43	 Calculer $p(E), p_F(\bar{E})$ puis $p_{\bar{E}}(F)$ à 10^{-2} près.	Soit A et B deux événements indépendants. On sait que p(A ∪ B) = $\frac{4}{5}$ et p($\overline{A}$) = $\frac{3}{5}$. Quelle est la probabilité de l'événement B ?	44

45	Dans un repère orthonormal de l'espace, donner un vecteur normal au plan d'équation x+2y–4 = 0 et donner un vecteur directeur et un point de la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2t \end{cases}$	On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n = 5 et p= 0,3. Calculer une valeur arrondie à 0,01 près de P(Y$\leqslant$ 4) puis de P(Y= 4). Calculer E(Y).	46
47	Pour un cycliste choisi au hasard parmi 50 coureurs d'une compétition cycliste, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que P(T) = 0,05. On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ». Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que : — si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ; — si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas. Calculer P(D).		
48	Soit une variable aléteoire Y qui suit une loi exponetielle de paramètre λ = 0,1. 1°) Quelle est son espérance ? 2°) Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de P(Y $\geqslant$ 2). 3°) Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de P(Y < 5). 4°) Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de P(2 $\leqslant$ Y < 5). 5°) Calculer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la probabilité que Y soit supérieure à 7 sachant que Y est supérieur à 3.	On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n et p= 0,3. Déterminer le plus petit entier n tel que P(Y$\geqslant$ 1) $\geqslant$ 0,99	49
50	1°) Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}$(2 ;4). Donner des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} de : a) P (–8 < Z < 4) b) P(–2 <Z < 6) (sans calculatrice) c) P(Z > 5) d) Le réel a tel que P(Z < a) = 0,4 2°) Soit Z une variable aléatoire d'espérance 2 et d'écart–type b. Donner une valeur approchée arrondies à 10^{-2} du réel b tel que P(Z < 8) = 0,7.	Soit Z une variable alétaoire qui suit une loi uniforme sur [0 ;4]. Calculer P(1<Z< 3) .	51
52	Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}$(0 ;1). Déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} du réel positif t tel que : P(–t< Z < t) = 0,6	Donner tous les seuils à connaître pour les lois normales.	53
54	Que peut–on déduire de l'information suivante ? Sur un échantillon de 400 adultes français propriétaires d'une unique voiture, 120 ont une voiture de marque française.	Que peut–on déduire de l'information suivante ? « On considère que 30 % des adultes français propriétaires d'une unique voiture ont une voiture de marque française. Sur un échantillon d'adultes français de 300 personnes ayant une unique voiture, ceux qui ont une voiture française est 87. »	55